УДК 658.788.5

© Полтавский А.В.
Poltavskiy A.

МОДЕЛЬ ИНТЕГРАЦИИ СИГНАЛОВ СИСТЕМЫ ГЛОНАСС/GPS

MODEL COMPLEXING OF SIGNALS BY SYSTEMS GLONASS/GPS

Аннотация. *В статье приводится один из подходов определения местоположения подвижных объектов в прикладных задачах моделирования многоканальных систем управления при использовании информации от приемников спутниковых систем ГЛОНАСС/GPS.*

Annotation. *Under consideration is one of the approaches in the tasks of the mathematical modeling of multichannel control systems of moving objects in case of using signals from receivers for satellite navigational systems GLONASS/GPS.*

Ключевые слова. *Навигационная спутниковая система, марковский процесс, беспилотный летательный аппарат.*

Key words. *Satellite navigational system, Markov process, unmanned aircraft vehicle.*

Основные положения марковского случайного процесса обобщаются и на совокупность наблюдаемых сигналов с приемников навигационных спутниковой системы ГЛОНАСС/GPS в дифференциальном режиме работы в задачах определения координат местоположения подвижного объекта управления (ОУ) $Y_1(t),...,Y_n(t)$, которые будем рассматривать как компоненты *n*-мерного векторного процесса $Y(t)$. Случайный векторный процесс сигналов с приемников навигационных спутников ГЛОНАСС/GPS $Y(t)$ должен быть таким, чтобы при непрерывном изменении аргумента *t* за любой малый промежуток времени Δt его компоненты $Y_i(t)$ изменялись на величину порядка $\sqrt{\Delta t}$ и все траектории каждой компоненты были непрерывны с вероятностью единица в обычном смысле понятия непрерывности функций. Считаем, что большие изменения компонент рассматриваемого случайного процесса маловероятны, конечные скачки имеют нулевую вероятность, а также в последовательные моменты времени $t_1 < t_2 < ... < t_m$, взятые в интервале существования рассматриваемого случайного процесса, будут известны значения его компоненты в виде

$$Y_1(t_1),...,Y_n(t_1);...;Y_1(t_m),...,Y_n(t_m).$$

Рассмотрим совокупность значений многомерного случайного процесса в моменты времени t_{h-1}, t_h при

$$t_{h-1} < t_h : Y_1(t_{h-1}),...,Y_n(t_{h-1}); Y_1(t_h),...,Y_n(t_h).$$

Из теории вероятностей известно [2], что многомерный случайный процесс является марковским, если закон распределения системы случайных величин $Y_1(t_h),...,Y_n(t_h)$, вычисленный при условии, что известны значения их $t = t_{h-1}Y_1(t_{h-1}),...,Y_n(t_{h-1})$, не зависит от того, какие значения случайные функции $Y_1(t),...,Y_n(t)$ принимали в моменты времени, предшествовавшие моменту времени t_{h-1}. Сформулированное положение выражается формулой, которая принимает вид записи для скалярного аргумента как

$$\begin{gathered} f(y_1(t_h),...,y_n(t_h)|y_1(t_1),..., \\ ,...,y_n(t_1);...;y_1(t_{h-1}),...,y_n(t_{h-1})] \equiv \\ \equiv f(y_1(t_h),...,y_n(t_h)|y_1(t_{h-1}),.... \equiv y_n(t_{h-1})). \end{gathered} \tag{1}$$

Данную формулу можно записать для векторного аргумента в следующей форме:

$$f(y(t_h)|y(t_1),...,y(t_{h-1})) = f(y(t_h)|y(t_{h-1})).$$

Из теории вероятностей также следует, что исчерпывающей характеристикой для многомерного (векторного) случайного марковского процесса подобно тому, как это имеет место для одномерного процесса, является вторая функция плотности вероятности

$$\begin{gathered} f_2(y(t_1), y(t_2)) = \\ = f_2(y_1(t_1),...,y_n(t_1); y_1(t_2),...,y_n(t_2)) \end{gathered} \tag{2}$$

или первая функция плотности вероятности $f_1(y(t_1))$ и функция вероятности перехода $f(y(t_2)|y(t_1))$ определяются равенствами как

$$\begin{gathered} f_1(y(t_1)) = f_1(y_1(t_1),...,y_n(t_1)); \\ f(y(t_2)|y(t_1)) = \\ = f(y_1(t_2),...,y_n(t_2)|y_1(t_1),...,y_n(t_1)). \end{gathered} \tag{3}$$

Полтавский Александр Васильевич – доктор технических наук, старший научный сотрудник, старший научный сотрудник ИПУ РАН, тел. 334-84-79.

Poltavskiy Alexander – Ph.D., senior scientist, senior scientist, Institute of control sciences of RAS, tel. 334-84-79.

Функции $f_1(y(t_1))$ и $f(y(t_2)|y(t_1))$ выражаются через $f_2(y(t_1), y(t_2))$ в следующем виде:

$$f_1(y(t_1)) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y(t_1), y^*(t_2))dy^*;$$
$$f(y(t_2)|y(t_1)) = \frac{f_2(y(t_2), y(t_1))}{f_1(y(t_1))}. \qquad (4)$$

Условная функция плотности вероятности $f(y(t_2)|y(t_1))$ в многомерном процессе неотрицательна и нормирована к единице, как и для одномерного, и обращается в дельта-функцию при совпадении моментов во времени $t_1 = t_2 = t$

$$f(y^*(t)\Big|y(t)) = \delta(y^* - y) =$$
$$= \delta(y_1^* - y_1),...,\delta(y_n^* - y_n). \qquad (5)$$

Плотность вероятности перехода $f(y(t_2)|y(t_1))$ для многомерного марковского случайного процесса также удовлетворяет и интегральному уравнению Смолуховского-Колмогорова-Чепмена при наблюдении в диапазоне времени $t_1 < t' < t_2$

$$f(y(t_2)|y(t_1)) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y(t_2)\big|y'(t'))f(y'(t')\big|y(t_1))dy'. \qquad (6)$$

Уравнение (6) получается путем простого обобщения на многомерный векторный процесс уравнения Маркова или на основании соотношения

$$f_h(y(t_1),..., y(t_h)) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{h+1}(y(t_1),..., y(t_h), y'(t'))dy'.$$

Применяя эту формулу для h=2, полагая, что

$$f_2(y(t_1), y(t_2)) = \int_{-\infty}^{\infty} f_3(y(t_1), y'(t')y(t_2))dy' \qquad (7)$$

и подставляя в эту формулу выражения для плотностей вероятности марковского процесса

$$f_2(y(t_1), y(t_2)) =$$
$$= f_1(y(t_1))f(y(t_2)|y(t_1));$$
$$f_3(y(t_1), y'(t'), y(t_2)) = \qquad (8)$$
$$= f_1(y(t_1))f(y(t_2)|y'(t'))\times$$
$$\times f(y'(t')|y(t_1)),$$

получаем выражение в виде

$$f_1(y(t_1))f(y(t_2)|y(t_1)) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y(t_1))f(y(t_2)\big|y'(t'))f(y'(t')\big|y(t_1))dy'. \quad (9)$$

Для многомерного марковского непрерывного процесса вводятся соответствующие две характеристические функции. Функции при n-мерном случайном марковском процессе $Y(t)$ для векторного аргумента $\lambda(\lambda_1,...,\lambda_n)$ записываются в виде

$$g_1(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^T y} f_1(y, t)dy;$$
$$g(\lambda, t\Big|y', t') = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda^T y} f(y, t\big|y', t')dy, \qquad (10)$$

где $\lambda^T y$ – скалярное произведение векторов λ и y. Так как многомерные плотности вероятности являются также интегрируемыми в бесконечных пределах неотрицательными функциями, то существует и преобразование Фурье, определяющее эти функции через соответствующие характеристические функции

$$f_1(y, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda^T y} g_1(\lambda, t)d\lambda;$$
$$f(y, t\Big|y', t') = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda^T y} g(\lambda, t\big|y', t')d\lambda. \qquad (11)$$

Характеристические же функции векторных случайных функций обладают свойствами, как и для одномерных случайных процессов.

Далее, если в n-мерном векторном аргументе часть компонент полагать равными нулю, то получим характеристическую функцию случайного векторного процесса уменьшенного порядка как

$$g_1(\lambda_1,...,\lambda_m, 0,...,0,\lambda_n, t) = g_1(\lambda_1,...,\lambda_m,\lambda_n, t).$$

На векторные марковские процессы обобщаются формулы, которые имеют вид

$$g_1(\lambda, t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} i\lambda_k M\left[Y_k(t)\right] +$$
$$+\frac{1}{2!}\sum_{k,\ell=1}^{n} i^2\lambda_k\lambda_\ell M\left[Y_k(t)Y_\ell(t)\right] +$$
$$+\frac{1}{3!}\sum_{k,\ell,r=1}^{n} i^3\lambda_k\lambda_\ell\lambda_r M\left[Y_k(t)Y_\ell(t)Y_r(t)\right] +,...,$$
$$+g(\lambda, t\Big|y', t') = 1 + \sum_{k=1}^{n} i\lambda_k\, M\left[Y_k(t)\big|y'\right] + \qquad (12)$$
$$+\frac{1}{2!}\sum_{k,\ell=1}^{n} i^2\lambda_k\lambda_\ell M\left[Y_k(t)Y_\ell(t)\big|y'\right] +$$
$$+\frac{1}{3!}\sum_{k,\ell,r=1}^{n} i^3\lambda_k\lambda_\ell\lambda_r M\left[Y_k(t)Y_\ell(t)Y_r(t)\big|y'\right] +,...,$$

где $M\left[Y_k(t)Y_\ell(t)...\right]$ – начальные моменты;

$M\left[Y_k(t)Y_\ell(t)...\big|y'\right]$ – условные начальные моменты случайного векторного процесса $Y(t)$.

Многомерный непрерывный марковский процесс так же, как и одномерный, может быть полностью описан *локальными* характеристиками. Этими локальными характеристиками являются условные математические ожидания, а также условные корреляционные моменты приращений компонент $Y_k(t)$ марковского случайного процесса при изменении аргумента на малый диапазон времени Δt

$$\Delta m_k(y,t) = M\left[Y_k(t+\Delta t) - Y_k(t)\middle| y,t\right] =$$
$$= A_k(y,t))\Delta t + 0(\Delta t);$$
$$\Delta m_{kl}(y,t) = M\left[(Y_k(t+\Delta t) -\right.$$
$$\left.-Y_k(t))(Y_l(t+\Delta t) - Y_l(t))\middle| y,t\right] =$$
$$= B_{kl}(y,t)\Delta t + 0(\Delta t); \qquad (k,l = 1,2,...), \tag{13}$$

где $A_k(y,t)$ – компоненты вектора $A(y,t)$ и $B_{kl}(y,t)$ – компоненты матрицы $B(y,t)$ являются непрерывными функциями, рассматриваемые вместе со своими производными. Условные моменты $\Delta m_{klr}, \Delta m_{klrs},...$ выше второго имеют порядок малости $0(\Delta t)$ более Δt в соответствии с определением для непрерывного марковского случайного процесса.

С помощью введенных локальных характеристик для многомерного марковского процесса запишем условную характеристическую функцию приращений $\Delta Y(t)$ процесса $Y(t)$ за время наблюдения Δt

$$g_{\Delta y}(\lambda, t+\Delta t | y,t) =$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} i\lambda_k \Delta m_k(y,t) + \frac{1}{2!}\sum_{k,l=1}^{n} i^2 \lambda_k \lambda_l \Delta m_{kl}(,t) +$$
$$+ \frac{1}{3!}\sum_{k,l,r=1}^{n} i^3 \lambda_k \lambda_l \lambda_r \Delta m_{klr}(y,t) + ,..., \tag{14}$$

где $\Delta m_k(y,t) = M\left[\Delta Y_k(t)\middle| y\right]$ – условные моменты первого порядка приращений $\Delta Y_k(t)$ координат;

Δm_{kl}, Δm_{klr} и т.д. – условные моменты высших порядков приращений координат.

Изложенный системный подход в математическом моделировании многомерного марковского процесса (нормально распределенного) может рассматриваться как характеризующий процесс блуждания векторов положения координат и скорости центра масс подвижного объекта, например беспилотного летательного аппарата (БЛА) в результате обработки сигналов с n приемников от спутниковой системы ГЛОНАСС/GPS, расположенных по периметру летательного аппарата. Для анализа этого процесса уравнения следует рассматривать как векторное. Компоненты данного векторного винеровского процесса независимы. Поэтому для каждой компоненты здесь можно повторить выкладки для соответствующего диффузионного процесса. В результате предлагаемого подхода в имитационном моделировании, например, первая плотность вероятности двумерного векторного процесса принимает вид

$$f_1(y_1, y_2, t) = \frac{1}{2\pi G t} e^{-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2Gt}}. \tag{15}$$

Для решения прикладных задач имитационного моделирования в лабораторных условиях было изготовлено 6 приемников от спутниковой навигации ГЛОНАСС/GPS в модели бортового комплекса (БКУ) многофункционального БЛА двойного назначения (рис.1).

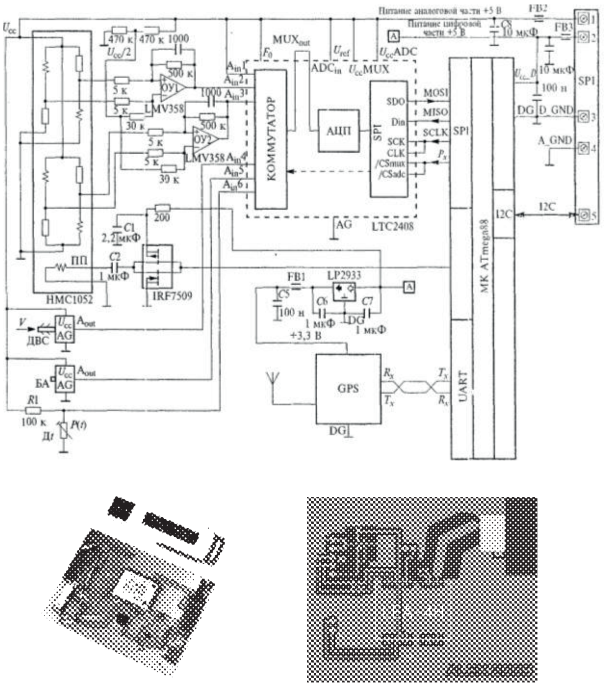

Рис.1. Внешний вид и топология схемы спутникового канала ГЛОНАСС/GPS в многоканальной структуре имитационных моделей БКУ БЛА экспериментальных исследований. Техническое решение впервые выполнено в НИР «КОМПЛЕКС-1» ИПУ РАН 14.06.2009 г.

На рис. 2 показан фрагмент имитационного моделирования в целях получения средней квадратической ошибки (СКО) η определения координат местоположения центра масс БЛА.

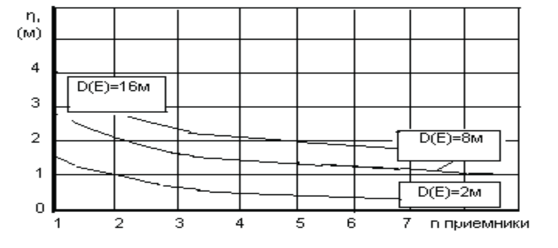

Рис.2. Изменения СКО от числа приемников спутникового канала ГЛОНАСС/GPS

Из графика видим, что устойчивость случайного процесса уже наблюдается при установке 6–8 приемников ГЛОНСС/GPS по периметру на подвижном объекте.

Литература
1. Казаков И.Е., Гладков Д.И. Методы оптимизации стохастических систем. – М.: Наука, 1987.
2. Кульба В.В., Микрин Е.Н., Павлов Б.В., Платонов В.Н. Теоретические основы проектирования информационно-управляющих систем космических аппаратов. //Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН.-М.: Наука, 2006.-579 с.
3. Казаков И.Е., Мальчиков С.В. Анализ стохастических систем в пространстве состояний.- М.: Наука, 1983.
4. Красильщиков М.Н., Мубаракшин Р.В., Ким Н.В. Бортовые информационно-управляющие средства оснащения ЛА. МАИ, 2003.
5. Полтавский А.В. Управление безопасностью движения беспилотного ЛА. – М.: Датчики и системы №9, 2008. С. 4-8.
6. Полтавский А.В. Модель измерительной системы в управлении БЛА // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2009. №10. С.73-77.

Материал поступил в редакцию 19. 03. 2014 г.